O AXIOMA DAS PARALELAS E AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Elizabete Cardoso Machado (bolsista do PIBIC/CNPq - AF), Paulo Alexandre Araújo Sousa (Orientador, Depto Matemática - UFPI)

Por volta de 300 anos antes de Cristo, na Grécia antiga, Euclides de Alexandria apresentou de maneira sistemática a matemática como ciência dedutiva. Isso significa que toda afirmação deve ser deduzida logicamente de outras afirmações mais simples. No começo dessa cadeia devem existir algumas afirmações (Postulados) não demonstradas. Euclides procurou escolher como postulados afirmações que seriam aceitas por qualquer pessoa de bom senso e que eram evidentes por si mesmas. O quinto postulado, equivalente ao Axioma das Paralelas, é o mais famoso. O próprio Euclides e muitos dos seus sucessores tentaram demonstrá-lo a partir dos quatro primeiros postulados. Mas sempre em vão. Foi necessário esperar até o século XIX para outros matemáticos conseguirem demonstrar que se tratava efetivamente de um postulado, necessário e independente dos outros. Os mesmos supuseram que o postulado de Euclides não era verdadeiro e substituíram-no por outro postulado: *1- Por um ponto fora de uma reta, podemos traçar infinitas retas paralelas à reta dada. Obtendo assim a Geometria de Lobachevski (hiperbólica); 2- Por um ponto fora de uma reta, não podemos traçar nenhuma paralela à reta dada. Nesse caso, obtiveram a Geometria de Riemann (esférica).* No presente trabalho, provamos o teorema de Gauss-Bonnet, teorema esse que relaciona a geometria estudada com o Axioma das Paralelas e a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo geodésico.

Teorema 1 (Teorema de Gauss-Bonnet)**.** *Sejam M^2 uma superfícies de curvatura gaussiana K, $T \subset M$ um triângulo geodésico e $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ seus ângulos internos. Então,*

$$\sum_{j=1}^{3} \theta_j - \pi = \iint_T K d\sigma.$$

Proposição 1 (Geometria Esférica)**.** *Os grandes círculos são as únicas geodésicas da esfera Euclidiana $\mathbb{S}^2$.*

Proposição 2 (Geometria Hiperbólica)**.** *Denotemos por $\mathbb{H}^2$ o semiplano superior $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ munido da métrica $g_{(x,y)}(v, u) = \frac{1}{y^2}\langle v, u\rangle$. As geodésicas de $\mathbb{H}^2$ são: (i) retas verticais e (ii) semi-círculos centrados sobre o eixo x.*

Palavras-Chave: Quinto Postulado de Euclides. Geometrias Não Eucllidianas. Teorema de Gauss-Bonnet.

Referências

[1] Araújo, Paulo Ventura. *Geometria Diferencial.* Coleção Matemática Universitária - IMPA. Rio de Janeiro, 1998.

[2] Barbosa, Lucas Marques. *Geometrria Hiperbólica.* Goiânia - Ed. da UFG, 2002.

[3] do Carmo, Manfredo Perdigão. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.* Coleção Textos Universitários - IMPA. Rio de Janeiro, 2005.

[4] do Carmo, Manfredo Perdigão. *Geometrias Não - Euclidianas.* Matemática Universitária, 6 (2005), p 25–48.

[5] Tenenblat, Keti. *Introdução à Geometrias Diferencial.* Editora Blucher. São Paulo, 2008.